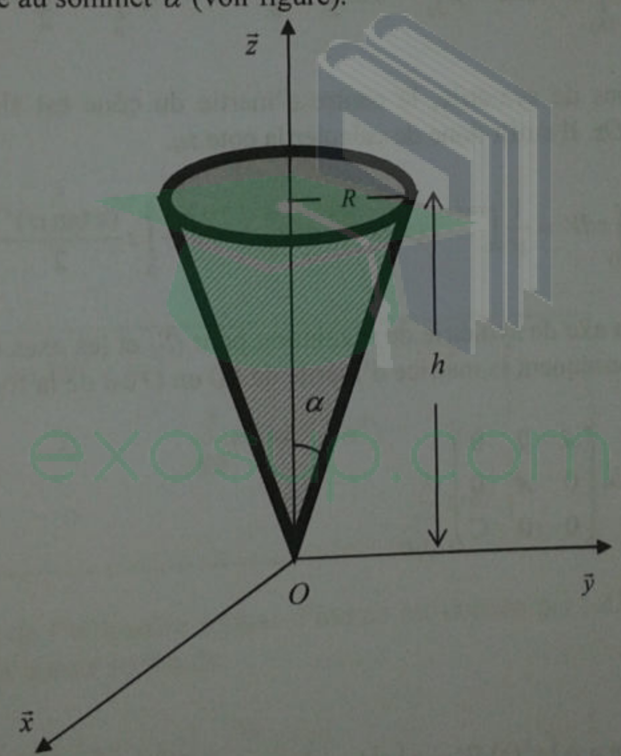
Exercice n° 1 : cône plein

Notions abordées

- **Masse**
- **Centre d'inertie**
- **Matrice d'inertie**
- **Théorème de Koenig**
- **Ellipsoïde central d'inertie**
- **Moment d'inertie par rapport à une droite**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère un cône homogène *(S)*, plein, de masse volumique ρ, de rayon à la base *R*, de hauteur *h* et de demi-angle au sommet α (voir figure).



PARTIE A- EN UTILISANT LES COORDONNEES CYLINDRIQUES

Q1- Calculer, par intégration, la masse *m* du cône.
Q2- Trouver la position de son centre d'inertie *G*.
Q3- Déterminer la matrice d'inertie de *(S)* en *O* dans (R).
Q4- En déduire la matrice d'inertie de *(S)* en *G* dans (R).
Q5- Donner l'équation de l'ellipsoïde central d'inertie.

Q6- Calculer le moment d'inertie de *(S)* par rapport à une génératrice.

PARTIE B - EN DECOUPANT LE CONE EN CYLINDRES ELEMENTAIRES

Reprendre les questions 1, 2 et 3 de la partie A en découpant le cône en un ensemble de cylindres de rayon *r*, d'épaisseur *dr* et de hauteur infinitésimale *dz*.

Commentaire : l'intérêt principal de cet exercice c'est qu'il traite la notion d'ellipsoïde d'inertie.

Solution détaillée

PARTIE A- EN UTILISANT LES COORDONNEES CYLINDRIQUES

R1- $$m = \int_{(S)} \rho dV = \rho \int_{(S)} r dr d\theta dz = \rho \int_0^{z\tan\alpha} r dr \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\rho \int_0^h \frac{(z\tan\alpha)^2}{2} dz = \rho \frac{\pi R^2 h}{3}$$

R2- Pour des raisons de symétrie, le centre d'inertie du cône est situé sur l'axe de symétrie matérielle Oz. Il suffit donc de calculer la cote z_G.

$$z_G = \frac{1}{m}\int_{(S)} z dm = \frac{1}{V}\int_{(S)} z dV = \frac{1}{V}\int_0^{z\tan\alpha} r(z) dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{2\pi}{V}\int_0^h z \frac{(z\tan\alpha)^2}{2} dz = \frac{3}{4}h$$

R3- L'axe Oz est un axe de symétrie de révolution pour *(S)* et les axes Ox et Oy jouent le même rôle. Par conséquent la matrice d'inertie de *(S)* en O est de la forme :

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

avec $A = \dfrac{C}{2} + \displaystyle\int_{(S)} z^2 dm$

Calcul de C

$$C = I_{Oz} = \int_{(S)} (x^2+y^2) dm = \rho \int_{(S)} r^2(z) dV = \rho \int_{(S)} r^2(z) . r dr d\theta dz = \rho \int_0^{z\tan\alpha} r^3(z) dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{3}{10} mR^2$$

Calcul de $\int_{(S)} z^2 dm$

$$\int_{(S)} z^2 dm = \rho \int_{(S)} z^2 dV = \rho \int_{(S)} z^2 r(z) dr d\theta dz = \rho \int_0^{z\tan\alpha} r(z) dr \int_0^h z^2 dz \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\rho \int_0^h z^2 \frac{(z\tan\alpha)^2}{2} dz = \frac{3}{5} mh^2$$

Calcul de A

$$A = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2 dm = \frac{3}{20} mR^2 + \frac{3}{5} mh^2 = \frac{3}{5} m(\frac{R^2}{4} + h^2)$$

d'où :

$$\boxed{M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} m(\frac{R^2}{4} + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} m(\frac{R^2}{4} + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R4- Par application du théorème de Huygens, on a :

$$\begin{cases} A = A_G + m z_G^2 \\ C = C_G \end{cases}$$

avec $z_G = \frac{3}{4} h$

$$\Rightarrow A_G = \frac{3}{20} mR^2 + \frac{3}{80} mh^2 = \frac{3}{80} m(4R^2 + h^2)$$

d'où :

$$\boxed{M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{80} m(4R^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{80} m(4R^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R5- L'équation de l'ellipsoïde central d'inertie est donnée par : $AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$ car les produits d'inertie sont nuls.

Soit :

$$\frac{3m}{80}(4R^2 + h^2)\left[X^2 + Y^2\right] + \frac{3m}{10} R^2 Z^2$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{X^2}{(\frac{80}{3m(4R^2 + h^2)})} + \frac{Y^2}{(\frac{80}{3m(4R^2 + h^2)})} + \frac{Z^2}{(\frac{10}{3mR^2})} = 1}$$

soit : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$

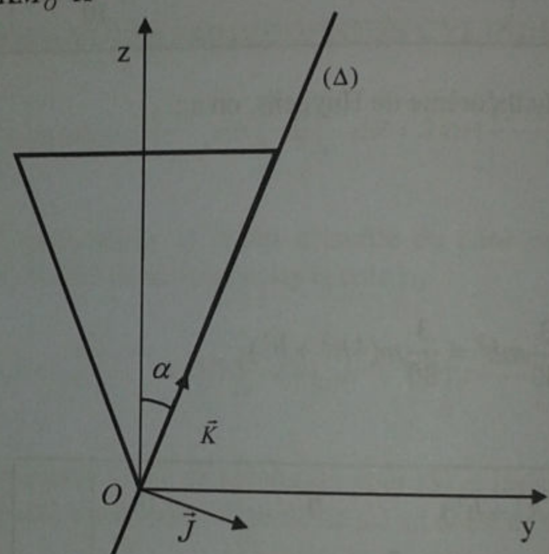
où a, b et c sont les demi-axes de l'ellipsoïde.

$$\boxed{a = b = \sqrt{\frac{80}{3m(4R^2+h^2)}} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{\frac{10}{3mR^2}}}$$

R6- Nous calculons le moment d'inertie de *(S)* par rapport à la génératrice, en calculant celui-ci dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ précisée dans la figure ci-après.

D'après le cours, on a :

$$I_\Delta^{(S)} = {}^t\vec{K} M_O^{(S)} \overline{K}$$



avec $\vec{K} = (0, \sin\alpha, \cos\alpha)$

$$I_\Delta^{(S)} = (\frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mR^2)\sin^2\alpha + \frac{3}{10}mR^2\cos^2\alpha = \frac{3}{10}mR^2\,\frac{R^2+6h^2}{2(R^2+h^2)}$$

soit en fonction de α :

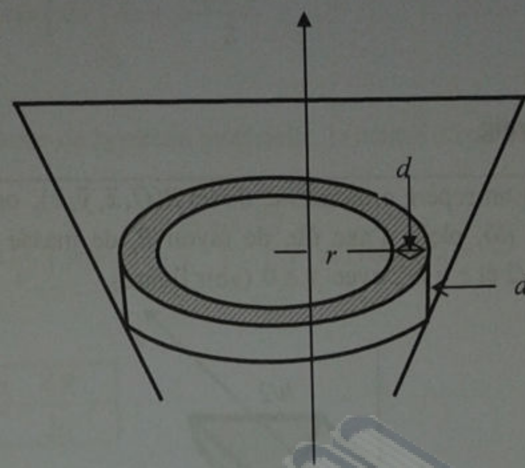
$$\boxed{I_\Delta^{(S)} = \frac{3}{10}mR^2\,\frac{\tan\alpha^2+6}{2\tan^2\alpha+2} = \frac{3}{10}mR^2\,\frac{\tan\alpha^2+6}{2(\tan^2\alpha+1)}}$$

PARTIE B - EN DECOUPANT LE CONE EN CYLINDRES ELEMENTAIRES

R1- La masse m du cône est : $m = \int_{(S)} \rho dV$

où dV est l'élément de volume d'un cylindre de rayon r, d'épaisseur dr et de hauteur dz : $dV = 2\pi r dr dz$

d'où : $m = \rho \int_{(S)} 2\pi r dr dz = \rho 2\pi \int_0^h (\int_0^{\frac{R}{h}z} r dr) dz = \rho \frac{\pi R^2 h}{3}$



Volume élémentaire

R2- $z_G = \frac{1}{m} \int_{(S)} z dm = \frac{1}{V} \int_{(S)} z dV = \frac{1}{V} \int_{(S)} z.2\pi r dr dz = \frac{2\pi}{V} \int_0^h (\int_0^{\frac{R}{h}z} r dr) dz = \frac{3}{4} h$

R3- Calcul de C

$C = I_{Oz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_{(S)} r^2 dV = \rho \int_{(S)} r^2 .2\pi r dr dz = \rho 2\pi \int_0^h (\int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr) dz = \frac{3}{10} mR^2$

Calcul de $\int_{(S)} z^2 dm$

$\int_{(S)} z^2 dm = \rho \int_{(S)} z^2 dV = \rho \int_{(S)} z^2 2\pi r dr d\theta dz = 2\pi\rho \int_0^h z^2 (\int_0^{\frac{R}{h}z} r dr) dz = \frac{3}{5} mh^2$

Calcul de A

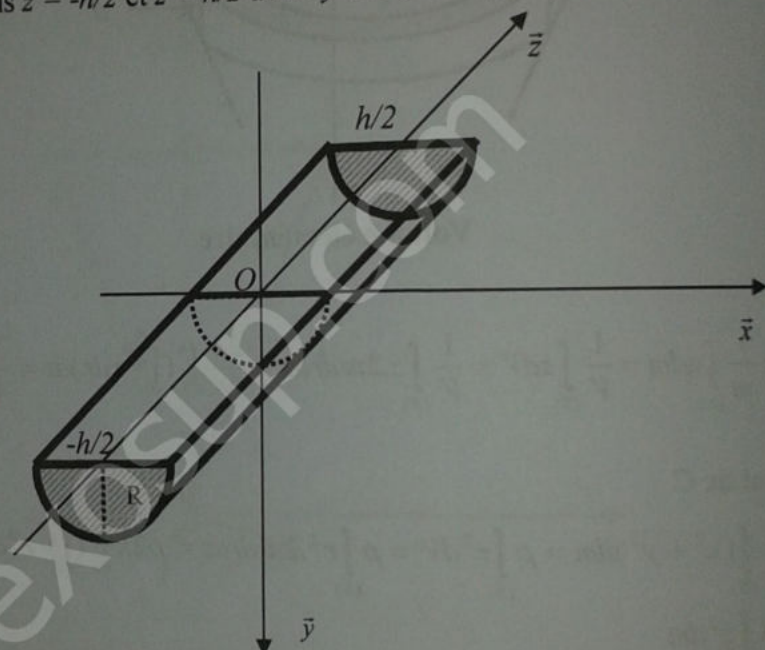
$A = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2 dm = \frac{3}{20} mR^2 + \frac{3}{5} mh^2$

Exercice n° 2 : demi-cylindre plein

Notions abordées

- ☞ **Centre d'inertie**
- ☞ **Matrice d'inertie**
- ☞ **Théorème de Koenig**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère un demi-cylindre homogène *(S)*, plein d'axe *Oz*, de rayon *R*, de masse volumique ρ, limité par les plans $z = -h/2$ et $z = h/2$ avec $y \geq 0$ (voir figure).



Q1- Calculer la masse *m* du demi-cylindre.
Q2- Trouver la position du centre d'inertie *G* de *(S)*.
Q3- Déterminer la matrice d'inertie de *(S)* en *O* dans (R).
Q4- En déduire la matrice d'inertie de *(S)* en *G* dans (R).

Solution détaillée

R1- Il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques (r,θ,z) :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Un volume élémentaire dV a pour masse $dm = \rho dV = \rho r dr d\theta dz$.

La masse m de *(S)* est :

$$m = \rho \int_{(S)} dV = \rho \int_0^R r dr \int_0^{\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \rho \frac{\pi R^2 h}{2}$$

R2- Pour des raisons de symétrie matérielle, le centre d'inertie G de *(S)* se trouve sur l'axe Oy :

$$y_G = \frac{1}{m} \int_{(S)} y dm = \frac{1}{V} \int_{(S)} y dV = \frac{1}{V} \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} r^2 \sin\theta dr d\theta dz = \frac{4R}{3\pi}$$

d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{4R}{3\pi}\vec{y}}$$

R3- Les plans yOz et xOy sont des plans de symétrie matérielle pour *(S)*, les produits d'inertie sont donc nuls.
d'où :

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Calcul de A

$$A = I_{Ox} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm = \rho \int_{(S)} (r^2 \sin^2\theta + z^2) dV = \rho \int_{(S)} r^2 \sin^2\theta dV + \rho \int_{(S)} z^2 dV$$

or :

$$\begin{cases} \rho \displaystyle\int_{(S)} r^2 \sin^2\theta dV = \rho \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} r^3 \sin^2\theta dr d\theta dz = \frac{mR^2}{4} \\ \rho \displaystyle\int_{(S)} z^2 dV = \rho \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} z^2 dr d\theta dz = \frac{mh^2}{12} \end{cases}$$

donc :

$$\boxed{A = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2)}$$

Calcul de B

$$B = I_{Oy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm = \rho \int_{(S)} (r^2 \cos^2\theta + z^2) dV$$

or : $\rho\int_{(S)} r^2\cos^2\theta dV = \rho\int_{r=0}^{r=R}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}\int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} r^3\cos^2\theta dr d\theta dz = \frac{mR^2}{4}$

d'où :

$$\boxed{B = \frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{12} = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2) = A}$$

Calcul de C

$$C = I_{Oz} = \int_{(S)}(x^2 + y^2)dm = A + B - 2\int_{(S)} z^2 dm = 2A - 2\int_{(S)} z^2 dm = \frac{mR^2}{2}$$

d'où :

$$\boxed{M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{m}{12}(3R^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R4- Par application de Koenig, on a :

$$M_G^{(S)} = M_O^{(S)} - \begin{pmatrix} m(\frac{4R}{3\pi})^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m(\frac{4R}{3\pi})^2 \end{pmatrix}$$

d'où :

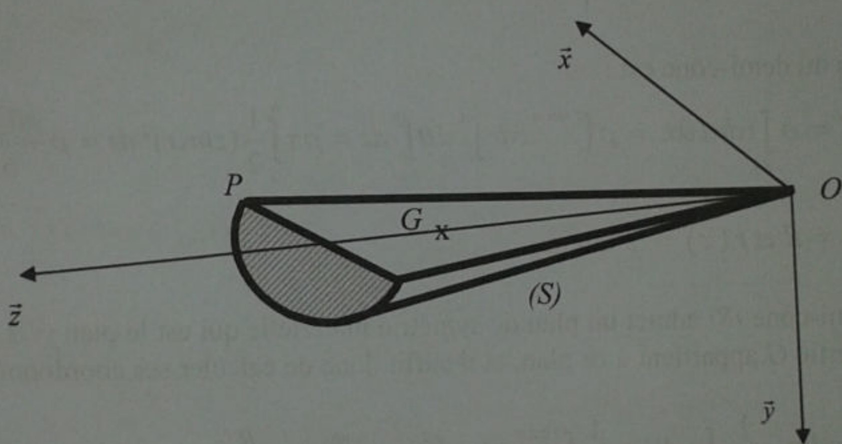
$$\boxed{M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{m\boxed{(9\pi^2 - 64)R^2 + 3\pi^2 h^2}}{36\pi^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3R^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(9\pi^2 - 32)}{18\pi^2} mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

Exercice n° 3 : demi-cône plein

Notions abordées

- **Centre d'inertie**
- **Matrice d'inertie**
- **Théorème de Koenig**
- **Moment d'inertie par rapport à un axe**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère un demi-cône homogène *(S)*, plein, d'axe *Oz*, de rayon à la base *R*, de hauteur *h*, de demi-angle au sommet α et de masse volumique ρ, avec $y \geq 0$ (voir figure).



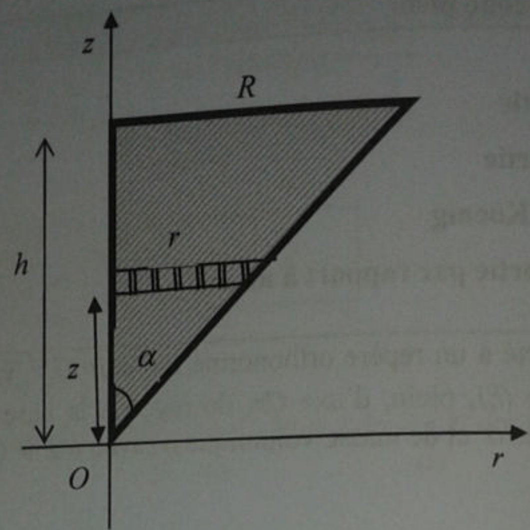
Q1- Calculer la masse m du demi-cône.
Q2- Trouver la position du centre d'inertie G de *(S)*.
Q3- Déterminer la matrice d'inertie de *(S)* en O dans (R).
Q4- En déduire la matrice d'inertie de *(S)* en G dans (R)
Q5- Calculer le moment d'inertie par rapport à la génératrice OP.

Commentaire : cet exercice explique comment on détermine le moment d'inertie par rapport à une droite.

Solution détaillée

R1- Il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques (r,θ,z) :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



La masse m du demi-cône est :

$$m = \int_{(S)} \rho dV = \rho \int_{(S)} r dr d\theta dz = \rho \int_0^{z \tan\alpha} r dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{h} dz = \rho\pi \int_0^{h} \frac{1}{2} (z tn\, \alpha)^2 dz = \rho \frac{\pi R^2 h}{6}$$

car $h \tan\alpha = R$ et $r(z) = z \tan\alpha$

R2- Le demi-cône *(S)* admet un plan de symétrie matérielle qui est le plan yOz, donc le centre d'inertie G appartient à ce plan, et il suffit donc de calculer ses coordonnées y_G et z_G.

$$y_G = \frac{1}{m} \int_{(S)} y dm = \frac{1}{V} \int_{(S)} y dV = \frac{1}{V} \int_0^{z \tan\alpha} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \int_0^{h} dz = \frac{R}{\pi}$$

et $$z_G = \frac{1}{m} \int_{(S)} z dm = \frac{1}{V} \int_{(S)} z dV = \frac{1}{V} \int_0^{z \tan\alpha} r dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{h} z dz = \frac{3}{4} h$$

R3- Le plan yOz étant un plan de symétrie matérielle pour *(S)*, les produits d'inertie F et E sont donc nuls. Par ailleurs les axes Ox et Oy jouent le même rôle, la matrice d'inertie de *(S)* en O relativement à (R) est de la forme :

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & -D \\ 0 & -D & C \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

avec $A = \dfrac{C}{2} + \displaystyle\int_{(S)} z^2 dm$

Calcul de C

$$C = I_{Oz} = \int_{(S)} (x^2+y^2)dm = \rho \int_{(S)} r^2 dV = \rho \int_0^{z\tan\alpha} r^3 dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^h dz = \frac{3}{10} mR^2$$

Calcul de $\int_{(S)} z^2 dm$

$$\int_{(S)} z^2 dm = \rho \int_{(S)} z^2 dV = \rho \int_0^{z\tan\alpha} r dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^h z^2 dz = \frac{3}{5} mh^2$$

Calcul de A

$$A = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2 dm = \frac{3}{20} mR^2 + \frac{3}{5} mh^2$$

Calcul de D

$$D = I_{yz} = \int_{(S)} yzdm = \rho \int_{(S)} yzdV = \rho \int_0^{z\tan\alpha} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \int_0^h zdz = \frac{4mhR}{5\pi}$$

d'où :

$$\boxed{M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} m(\frac{R^2}{4} + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} m(\frac{R^2}{4} + h^2) & -\frac{4mhR}{5\pi} \\ 0 & -\frac{4mhR}{5\pi} & \frac{3}{10} mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R4- Par application du théorème de Huygens généralisé, on a :

$$\boxed{\begin{cases} A_G = A - m\left[(\frac{R}{\pi})^2 + (\frac{3h}{4})^2\right] = (\frac{3}{20} - \frac{1}{\pi^2})mR^2 + \frac{7}{16} mh^2 \\ B_G = A - m(\frac{3h}{4})^2 = \frac{3}{20} mR^2 + \frac{7}{16} mh^2 \\ C_G = C - m(\frac{R}{\pi})^2 = (\frac{3}{10} - \frac{1}{\pi^2})mR^2 \\ D_G = D - \frac{3mhR}{4\pi} = \frac{mhR}{20\pi} \end{cases}}$$

d'où :

$$M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} A_G & 0 & -D_G \\ 0 & B_G & 0 \\ 0 & -D_G & C_G \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

R5- Le moment d'inertie de *(S)* par rapport à la génératrice OP est donné par :

$$I_{OP} = {}^t\vec{u}M_O^{(S)}\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la génératrice OP : $\vec{u} = \left|\begin{array}{l} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{array}\right._{(R)}$

avec :

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+h^2}} \\ \cos\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} \end{cases}$$

d'où :

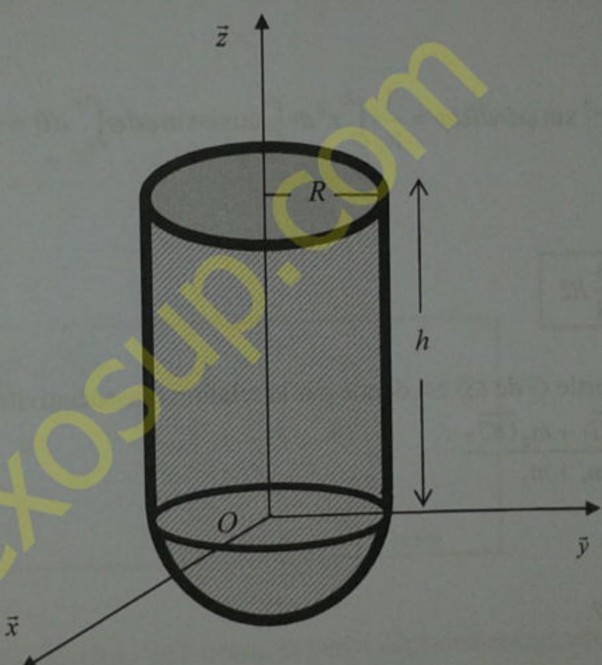
$$I_{OP} = A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha = \frac{3}{20}\frac{mR^2}{R^2+h^2}(R^2+6h^2)$$

Exercice n° 4 : assemblage d'un cylindre plein et d'une demi-boule

Notions abordées

- **Centre d'inertie**
- **Matrice d'inertie**
- **Théorème de Koenig**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère un système homogène *(S)*, de masse *m*, composé d'un cylindre plein *(S₁)* à section circulaire, de masse m_1, de centre d'inertie G_1, de rayon *R* et de hauteur *h* et d'une demi-boule (S_2), de masse m_2 et de même rayon *R* (voir figure). On suppose que le cylindre et la demi-boule sont constitués du même matériau de densité volumique ρ.



Q1- Trouver la position du centre d'inertie G_2 de la demi-boule.
Q2- En déduire la position du centre d'inertie *G* du système *(S)*.
Q3- Déterminer la matrice d'inertie du cylindre en G_1 dans (R).
Q4- En déduire la matrice d'inertie du cylindre en *O* dans (R).
Q5- Déterminer la matrice d'inertie de la demi-boule en *O* dans (R).
Q6- En déduire la matrice d'inertie du culbuto en *O* dans (R). On exprimera ses composantes en fonction de ρ, h *et R*.
Q7- Exprimer la matrice d'inertie de *(S)* en *G* dans (R).

Commentaire : dans cet exercice le système est composé de deux solides, ce qui permettra d'utiliser la propriété d'associativité pour le centre d'inertie et d'additivité pour la matrice d'inertie de *(S)*.

Solution détaillée

R1- $z_{G_2} = \dfrac{1}{m} \displaystyle\int_{(S_2)} z\,dm = \dfrac{1}{V_2} \int_{(S_2)} z\,dV$ où V_2 est le volume de (S_2).

En coordonnées sphériques (θ longitude et φ co-latitude), on a :

$$\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ dV = r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi \end{cases}$$

donc :

$$z_{G_2} = \frac{1}{V_2} \int_{(S_2)} r\cos\varphi\, r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{V_2} \int_0^R r^3 dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = -\frac{3}{8} R$$

d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{OG_2} = -\frac{3}{8} R\vec{z}}$$

R2- Le centre d'inertie G de *(S)* est donné par la relation d'associativité :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OG_1} + m_2 \overrightarrow{OG_2}}{m_1 + m_2}$$

avec : $\begin{cases} m_1 = \pi R^2 h \rho \\ m_2 = \dfrac{2}{3} \pi R^3 \rho \\ \overrightarrow{OG_1} = \dfrac{h}{2} \vec{z} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{6h^2 - 3R^2}{4(2R + 3h)} \vec{z} = Z\vec{z}}$$

R3- Compte tenu de la symétrie de révolution, la matrice d'inertie de (S_1) en G s'écrit :

$$M_G^{(S_1)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

avec $A = B = \frac{C}{2} + \int_{(S_1)} z^2 dm$

Calcul de C

$$C = I_{Oz} = \int_{(S_1)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_{(S_1)} r^2 .rdrd\theta dz = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \frac{m_1 R^2}{2}$$

Calcul de $C' = \int_{(S_1)} z^2 dm$

$$C' = \int_{(S_1)} z^2 dm = \rho \int_{(S_1)} z^2 .rdrd\theta dz = \rho \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{m_1 h^2}{12}$$

Calcul de A

$$A = \frac{C}{2} + \int_{(S_1)} z^2 dm = \frac{m_1 R^2}{4} + \frac{m_1 h^2}{12} = \frac{m_1}{4}(R^2 + \frac{h^2}{3})$$

d'où :

$$\boxed{M_G^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{4}(R^2 + \frac{h^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{4}(R^2 + \frac{h^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R4- En utilisant le théorème de Koenig, la partie déplacement se calcule avec :

$$d = m_1 (\frac{h}{2})^2 = m_1 \frac{h^2}{4}$$

$$M_O^{(S_1)} = M_G^{(S_1)} + \begin{pmatrix} \frac{mh^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mh^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

soit :

$$M_O^{(S_1)} = \begin{pmatrix} (\frac{m_1 R^2}{4} + \frac{m_1 h^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{m_1 R^2}{4} + \frac{m_1 h^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1 R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

R5- Les plans xOz et yOz sont des plans de symétrie matérielle pour (S_2), les produits d'inertie sont donc tous nuls. Par ailleurs les axes Ox et Oy jouent le même rôle, donc :

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_{(S_2)} z^2 dm$$

Calcul de C

$$C = \int_{(S_2)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{2}{5} m_2 R^2$$

Calcul de $C' = \int_{(S_2)} z^2 dm$

$$C' = \int_{(S_2)} z^2 dm = \rho \int_{(S_2)} z^2 dV = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{m_2 R^2}{5}$$

donc :

$$A = B = \frac{C}{2} + C' = \frac{2}{5} m_2 R^2$$

d'où :

$$M_O^{(S_2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} m_2 R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} m_2 R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} m_2 R^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$\boxed{\text{R6-}}$ $M_O^{(S)} = M_O^{(S_1)} + M_O^{(S_2)}$

d'où :

$$\boxed{M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} m_1(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{3})+\frac{2}{5}m_2R^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{3})+\frac{2}{5}m_2R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_1R^2}{2}+\frac{2}{5}m_2R^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

soit en fonction de ρ, h et R :

$$\boxed{M_O^{(S)} = \frac{\rho\pi R^2}{60}\begin{pmatrix} 20h^3+15hR+16R^3 & 0 & 0 \\ 0 & 20h^3+15hR+16R^3 & 0 \\ 0 & 0 & 30hR+16R^3 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

$\boxed{\text{R7-}}$ D'après le théorème de Huygens généralisé, on a :

$$\begin{cases} A_G = B_G = A - mZ^2 \\ C_G = C \end{cases} \quad \text{avec : } Z = \frac{6h^2-3R^2}{4(2R+3h)}$$

d'où :

$$\boxed{M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

avec

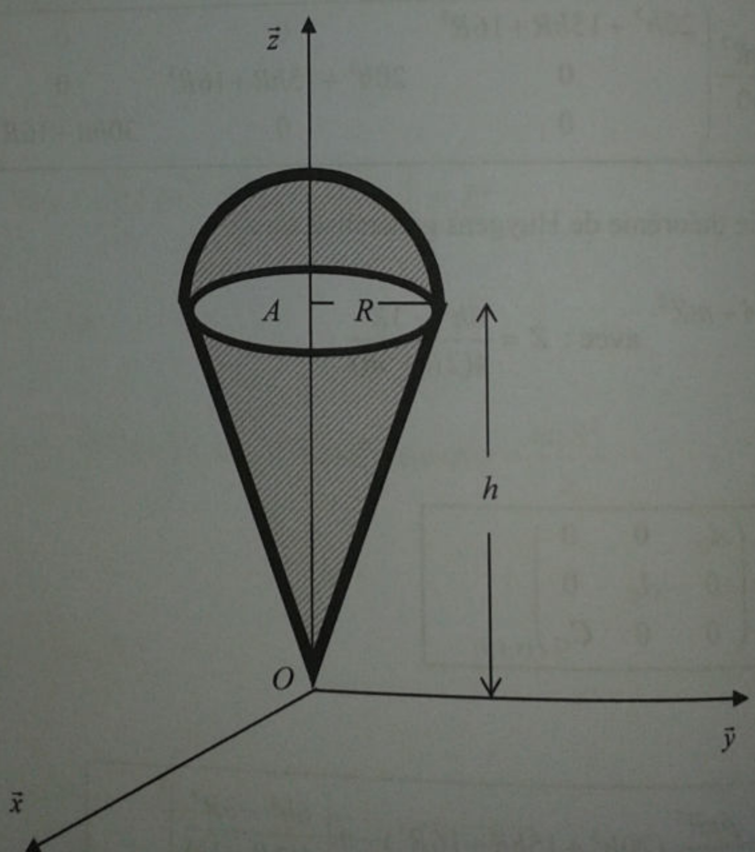
$$\boxed{\begin{cases} A_G = \frac{\rho\pi R^2}{60}(20h^3+15hR+16R^3) - m\left[\frac{6h^2-3R^2}{4(2R+3h)}\right]^2 \\ C_G = \frac{\rho\pi R^2}{60}(30hR+16R^3) \end{cases}}$$

Exercice n° 5 : assemblage d'un cône plein et d'une demi-boule

Notions abordées

- **Centre d'inertie**
- **Matrice d'inertie**
- **Théorème de Koenig**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère un système homogène *(S)* formé d'un cône plein *(S₁)* (de masse M, de hauteur h et de rayon R) et d'une demi-boule *(S₂)* (de masse m, de même rayon R et de centre A) soudés entre eux (voir figure). Le matériau constituant l'assemblage a une densité volumique ρ.



PARTIE A - CALCULS PRELIMINAIRES

Q1- Calculer le volume V_1 du cône.
Q2- Trouver la position du centre d'inertie G_1 de (S_1).
Q3- Trouver la position du centre d'inertie G_2 de la demi-boule.
Q4- Calculer le volume V_2 de (S_2).

Q5- Calculer le rapport $\frac{M}{m}$ pour que le centre d'inertie G du système soit en A.

PARTIE B - MATRICE D'INERTIE DE (S) EN A

Q6- Déterminer la matrice d'inertie de (S_1) en A dans(R).
Q7- Déterminer la matrice d'inertie de (S_2) en A dans (R).
Q8- Déterminer la matrice d'inertie de (S) en A dans(R).

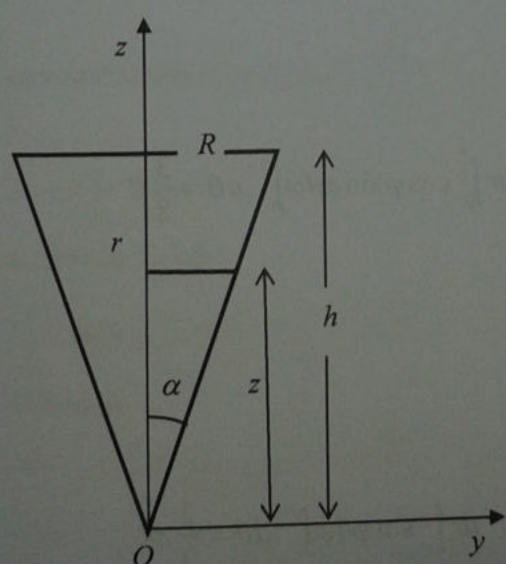
PARTIE C - MATRICE D'INERTIE DE (S) EN O

En utilisant le théorème de Huygens :
Q9- Déterminer la matrice d'inertie de (S_1) en O dans (R).
Q10- Déterminer la matrice d'inertie de (S_2) en O dans (R).
Q11- Déterminer la matrice d'inertie de (S) en O dans (R).

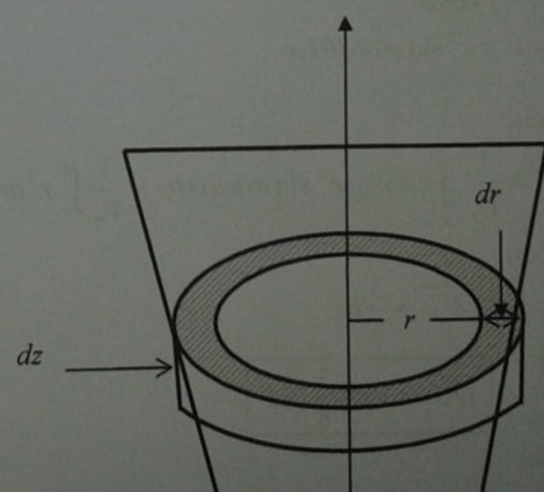
Solution détaillée

PARTIE A - CALCULS PRELIMINAIRES

R1-



Coupe par le plan yOz



Volume élémentaire

Le volume élémentaire visualisé sur la figure ci-dessus est :

$dV_1 = 2\pi r dr dz$ avec : $r = r(z) = \frac{R}{h} z$

Le volume du cône en entier est :

$$V_1 = \int_{(S_1)} 2\pi r dr dz = 2\pi \int_0^{\frac{R}{h}z} r dr \int_0^h dz = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

R2- Calcul de $\overrightarrow{OG_1}$

En raison de la symétrie du cône, son centre d'inertie G_1 est situé sur l'axe Oz :

$$z_{G_1} = \frac{1}{M}\int_{(S_1)} z dm = \frac{1}{V_1}\int_{(S_1)} z dV = \frac{1}{V_1}\int_{(S_1)} z.2\pi r dr dz = \frac{2\pi}{V_1}\int_0^{\frac{R}{h}z} r dr \int_0^h z dz = \frac{3}{4}h$$

d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{OG_1} = \frac{3}{4}h\vec{z}}$$

R3- Calcul de $\overrightarrow{OG_2}$

$$\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG_2} = h\vec{z} + Z\vec{z}$$

$Z = \frac{1}{m}\int_{(S_2)} z dm = \frac{1}{V_2}\int_{(S_2)} z dV$ où V_2 est le volume de la demi-boule.

En coordonnées sphériques (θ longitude et φ co-latitude) :

$$\begin{cases} z = r\cos\varphi \\ dV = r^2 \sin\varphi . dr d\theta d\varphi \end{cases}$$

donc :

$$Z = \frac{1}{V_2}\int_{(S_2)} r\cos\varphi . r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi = \frac{1}{V_2}\int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3}{8}R$$

d'où :

$$\overrightarrow{AG_2} = \frac{3}{8}R\vec{z}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{OG_2} = (h + \frac{3}{8}R)\vec{z}}$$

R4- $V_{(S_2)} = \int_{(S_2)} dV = \int_{(S_2)} r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3}\pi R^3$

R5- $(M + m)\overrightarrow{AG} = M\overrightarrow{AG_1} + m\overrightarrow{AG_2}$

Si G est en A, alors :

$$M\overrightarrow{AG_1} + m\overrightarrow{AG_2} = \vec{0} \Rightarrow -M.\frac{h}{4} + m.\frac{3}{8}R = 0 \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{3R}{2h} \quad (1)$$

par ailleurs, on a : $\begin{cases} M = \rho \dfrac{\pi R^2 h}{3} \\ m = \rho \dfrac{2\pi R^3}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \dfrac{M}{m} = \dfrac{h}{2R}$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ $h = R\sqrt{3}$, ce qui donne :

$$\boxed{\frac{M}{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

PARTIE B - MATRICE D'INERTIE DE (S) EN A

R6- Matrice d'inertie du cône en A :

Le cône a deux plans de symétrie matérielle qui sont *(xAz)* et *(yAz)*, par conséquent les produits d'inertie sont nuls. Les axes Ax et Ay jouent le même rôle, donc $I_{Ax} = I_{Ay}$ et la matrice d'inertie de (S_1) en A est de la forme :

$$M_A^{(S_1)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{avec } A = \frac{C}{2} + \int_{(S_1)} z^2 dm$$

Calcul de C

$$C = I_{Az} = \int_{(S_1)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_{(S_1)} (x^2 + y^2) dV$$

en coordonnées cylindriques : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ dV = 2\pi r dr dz \end{cases}$

$$C = \rho \int_{(S_1)} r^2 2\pi r dr dz = \rho 2\pi \int_0^{\frac{R}{h}z+R} r^3 dr \int_{-h}^0 dz = \rho \frac{2\pi}{4} \int_{-h}^0 (\frac{R}{h}z + R)^4 dz = \frac{3}{10} MR^2$$

Calcul de $\int_{(S_1)} z^2 dm$

$$\int_{(S_1)} z^2 dm = \rho \int_{(S_1)} z^2 dV = \rho \int_{(S_1)} z^2 2\pi r dr dz = \rho 2\pi \int_0^{\frac{R}{h}z+R} r dr \int_{-h}^0 z^2 dz = \frac{Mh^2}{10}$$

Calcul de A

$$A = \frac{C}{2} + \int_{(S_1)} z^2 dm = \frac{3}{20} MR^2 + \frac{Mh^2}{10}$$

d'où :

$$\boxed{M_A^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{M}{20}(3R^2 + 2h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{20}(3R^2 + 2h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} MR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R7- Matrice d'inertie de la demi-boule en ***A***

La demi-boule a deux plans de symétrie matérielle *(xAz)* et *(yAz)*, par conséquent les produits d'inertie sont nuls. La demi-boule (comme la boule) bénéficie également de la symétrie sphérique : $I_{Ax} = I_{Ay} = I_{Az}$

donc : $3I_{Ax} = I_{Ax} + I_{Ay} + I_{Az} = 2\int_{(S_2)}(x^2 + y^2 + z^2)dm = 2I_A$

$$\Rightarrow I_{Ax} = I_{Ay} = I_{Az} = \frac{2}{3}I_A$$

en utilisant les coordonnées sphériques, il vient :

$$I_A = \rho\int_{(S_2)} r^2 dV = \rho\int_{(S_2)} r^2.r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi = \rho\int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi = \frac{3}{5}mR^2$$

$$\Rightarrow I_{Ax} = I_{Ay} = I_{Az} = \frac{2}{3}I_A = \frac{2}{5}mR^2$$

d'où :

$$\boxed{M_A^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R8- Matrice d'inertie de (S) en ***A*** **:**

$M_A^{(S)} = M_A^{(S_1)} + M_A^{(S_2)}$

d'où :

$$\boxed{M_A^{(S)} = \begin{pmatrix} \frac{M}{20}(3R^2 + 2h^2) + \frac{2}{3}mR^2 & & \\ & \frac{M}{20}(3R^2 + 2h^2) + \frac{2}{3}mR^2 & \\ & & \frac{3}{10}MR^2 + \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

PARTIE C - MATRICE D'INERTIE DE (S) EN O

R9- Matrice d'inertie du cône en ***O***

Pour déterminer la matrice d'inertie de *(S₁)* en *O*, on va utiliser le théorème de Huygens deux fois : d'abord entre les points *A* et *G₁* puis entre les points *G₁* et *O*.

– Théorème de Huygens entre A et G_1 :

$$M_{G_1}^{(S_1)} = M_A^{(S_1)} - \left[Md_1^2\right] \qquad \text{avec} \quad d_1 = \frac{h}{4}$$

$$\Rightarrow \quad M_{G_1}^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{80}Mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{80}Mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

soit :

$$\boxed{M_{G_1}^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{80}M(4R^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{80}M(4R^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

– Théorème de Huygens entre O et G_1 :

$$M_O^{(S_1)} = M_{G_1}^{(S_1)} + \left[Md'^2_1\right] \text{ avec } d'_1 = \frac{3}{4}h$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_0^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}h^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}h^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}MR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R10- Matrice d'inertie de la demi-boule en O :
Pour déterminer la matrice d'inertie de (S_2) en O, on va utiliser le théorème de Huygens deux fois : d'abord entre les points A et G_2 puis entre les points G_2 et O.

– Théorème de Huygens entre A et G_2 :

$$M_{G_2}^{(S_2)} = M_A^{(S_2)} - \left[md_2^2\right] \text{ avec } d_2 = \frac{3}{8}R$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_{G_2}^{(S_2)} = \begin{pmatrix} \frac{83}{320}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{83}{320}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

– Théorème de Huygens entre O et G_2 :

$$M_O^{(S_2)} = M_{G_2}^{(S_2)} + \left[Md'^2_2\right]$$

avec : $d'_2 = h + \frac{3}{8}R$

$$\Rightarrow \boxed{M_0^{(S_2)} = \begin{pmatrix} \frac{83}{320}mR^2 + m(\frac{3}{8}R+h)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{83}{320}mR^2 + m(\frac{3}{8}R+h)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R11- Matrice d'inertie de *(S)* en *O* :

$$M_O^{(S)} = M_O^{(S_1)} + M_O^{(S_2)} = \begin{pmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & A_S & 0 \\ 0 & 0 & C_S \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

avec :

$$\boxed{\begin{cases} A_s = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}Mh^2 + \frac{83}{320}mR^2 + m(\frac{3}{8}R+h)^2 \\ C_S = \frac{3}{10}MR^2 + \frac{2}{5}mR^2 \end{cases}}$$

ou encore :

$$\boxed{\begin{cases} A_s = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{2}{5}mR^2 + (\frac{3}{5}M+m)h^2 + \frac{3}{4}mRh \\ C_S = \frac{3}{10}MR^2 + \frac{2}{5}mR^2 \end{cases}}$$

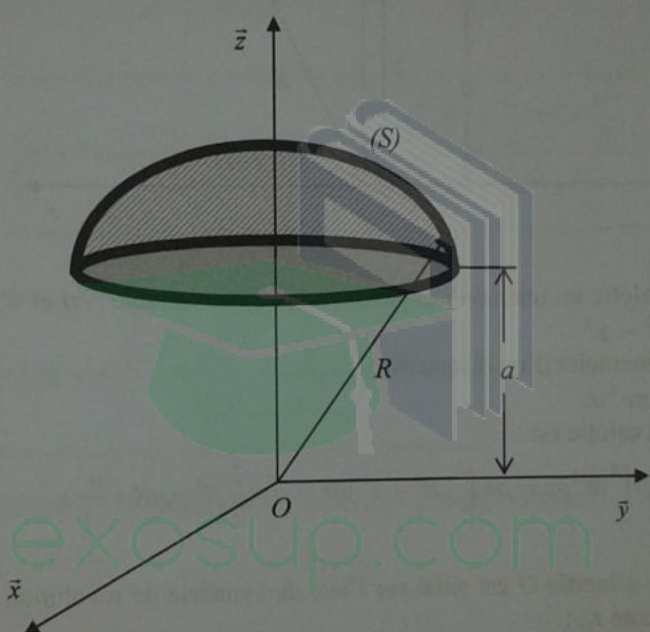
Exercice n° 6 : calotte sphérique pleine

Notions abordées

- **Masse**
- **Centre d'inertie**
- **Matrice d'inertie**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère un solide homogène *(S)* ayant la forme d'une calotte sphérique pleine, de rayon R et de masse volumique ρ.

La distance qui sépare la base de *(S)* au plan xOy est notée a ($0 < a < R$) (voir figure).



PARTIE A - PAR DECOMPOSITION DE LA CALOTTEEN EN DISQUES ELEMENTAIRES

Q1- Calculer la masse m de la calotte sphérique, en utilisant un calcul intégral.
Q2- Trouver la position du centre d'inertie G de *(S)*.
Q3- Déterminer la matrice d'inertie de la calotte en O dans le repère *(R)* lié à *(S)*.
Q4- En déduire, la masse, le centre d'inertie et la matrice d'inertie en O dans (R) d'une demi-sphère pleine de masse m et de rayon R.

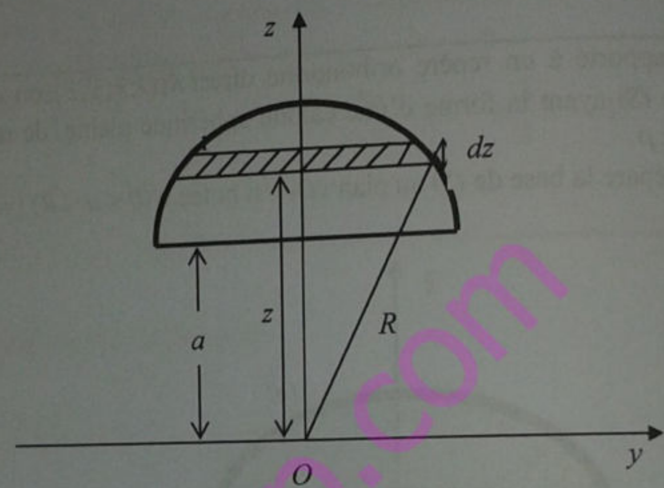
PARTIE B - EN UTILISANT LES COORDONNEES SPHERIQUES

Reprendre les questions 1, 2, 3 de la partie A en utilisant les coordonnées sphériques.

Solution détaillée

PARTIE A - PAR DECOMPOSITION DE LA CALOTTE EN DISQUES ELEMENTAIRES

R1-



On divise la calotte en une série de disques de rayon variable $r(z)$ et d'épaisseur dz tel que : $r^2 = R^2 - z^2$

Le volume élémentaire d'un disque est :

$$dV = \pi r^2 dz$$

La masse de la calotte est :

$$m = \rho \int_{(S)} dV = \rho \int_a^R \pi r^2 dz = \rho\pi \int_a^R (R^2 - z^2)dz = \rho\pi(\frac{2}{3}R^3 - aR + \frac{a^3}{3})$$

R2- Le centre d'inertie G est situé sur l'axe de symétrie de révolution Oz, il suffit de déterminer sa cote z_G :

$$z_G = \frac{1}{m}\int_{(S)} zdm = \frac{1}{V}\int_{(S)} zdV = \frac{\pi}{V}\int_a^R zr^2 dz = \frac{\pi}{V}\int_a^R z(R^2 - z^2)dz = \frac{\frac{R^4}{4} - \frac{a^2}{2}R^2 + \frac{a^4}{4}}{\frac{2}{3}R^3 - aR^2 + \frac{a^3}{3}}$$

R3- La calotte présente la symétrie de révolution, sa matrice d'inertie en O est de la forme :

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{avec} \quad A = \frac{C}{2} + \int_{(S_1)} z^2 dm$$

Calcul de C

$$C = I_{Oz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2)dm$$

Soit dI_{Oz} le moment d'inertie d'un disque élémentaire de masse dm, on a :

$$dI_{Oz} = \frac{r^2}{2} dm$$

Donc le moment d'inertie I_{Oz} de la calotte est :

$$\boxed{C = I_{Oz} = \int_{(S)} dI_{Oz} = \int_{(S)} \frac{r^2}{2} dm = \frac{\rho\pi}{2} \int_a^R (R^2 - z^2)dz = m \frac{\frac{4}{15}R^5 - \frac{a}{2}R^4 + \frac{1}{3}a^3R^2 - \frac{1}{10}a^5}{\frac{2}{3}R^3 - aR^2 + \frac{a^3}{3}}}$$

Calcul de $\int_{(S)} z^2 dm$

$$\boxed{\int_{(S)} z^2 dm = \rho \int_{(S)} z^2 dV = \rho\pi \int_a^R z^2(R^2 - z^2)dz = m \frac{\frac{2}{15}R^5 - \frac{a^3}{3}R^2 + \frac{a^5}{5}}{\frac{2}{3}R^3 - aR^2 + \frac{a^3}{3}}}$$

Calcul de A

$$\boxed{A = \frac{C}{2} + \int_{(S_1)} z^2 dm = m \frac{\frac{4}{15}R^5 - \frac{a}{4}R^4 - \frac{a^3}{6}R^2 + \frac{3}{20}a^5}{\frac{2}{3}R^3 - aR^2 + \frac{a^3}{3}}}$$

R4 Dans le cas d'une demi-sphère pleine, on a : $a = 0$, ce qui donne :

$$\boxed{\begin{cases} m = \rho \frac{2}{3}\pi R^3 \\ z_G = \frac{3}{8}R \\ A = C = \frac{2}{5}mR^2 \end{cases}}$$

PARTIE B - EN UTILISANT LES COORDONNEES SPHERIQUES

R1- Il est plus simple d'utiliser les coordonnées sphériques (θ longitude et φ co-latitude) :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

L'élément de volume est : $dV = r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi$

La masse m de la calotte est :

$$m = \rho \int_{(S)} dV = \rho \int_{(S)} r^2 \sin\varphi dr d\theta d\varphi = \rho \int_{\frac{a}{\cos\varphi}}^{R} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\arccos\frac{a}{R}} \sin\varphi d\varphi = \rho\pi(\frac{2}{3}R^3 - aR^2 + + \frac{1}{3}a^3)$$

R2- Pour des raisons de symétrie, G est situé sur l'axe Oz : $x_G = y_G = 0$

$$z_G = \frac{1}{m}\int_{(S)} z dm = \frac{1}{V}\int_{(S)} z dV = \frac{1}{V}\int_{\frac{a}{\cos\varphi}}^{R} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\arccos\frac{a}{R}} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{\frac{R^4}{4} - \frac{a^2}{2}R^2 + \frac{a^4}{4}}{\frac{2}{3}R^3 - aR^2 + \frac{a^3}{3}}$$

R3- En raison de la symétrie de révolution, la matrice d'inertie de la calotte en O est de la forme :

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \text{avec} \qquad A = \frac{C}{2} + \int_{(S_1)} z^2 dm$$

Calcul de C

$$C = I_{Oz} = \int_{(S)} (x^2+y^2) dm = \rho \int_{\frac{a}{\cos\varphi}}^{R} r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\arccos\frac{a}{R}} \sin^3\varphi d\varphi = \rho 2\pi(-\frac{1}{4}aR^4 + \frac{1}{3}a^3R^2 - \frac{1}{20}a^5 + \frac{2}{15}R^5)$$

soit :

$$\boxed{C = m\frac{\frac{4}{15}R^5 - \frac{a}{2}R^4 + \frac{a^3}{3}R^2 - \frac{1}{10}a^5}{\frac{2}{3}R^3 - aR^2 + \frac{a^3}{3}}}$$

Calcul de $\int_{(S)} z^2 dm$

$$\int_{(S)} z^2 dm = \rho \int_{(S)} z^2 dV = \rho \int_{\frac{a}{\cos\varphi}}^{R} r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\arccos\frac{a}{R}} \cos^2\varphi \sin\varphi d\varphi = \rho 2\pi(-\frac{1}{6}a^3R^2 + \frac{1}{15}R^5 + \frac{1}{10}a^5)$$

soit :

$$\boxed{\int_{(S)} z^2 dm = m\frac{\frac{2}{15}R^5 - \frac{a^3}{3}R^2 + \frac{a^5}{5}}{\frac{2}{3}R^3 - aR^2 + \frac{a^3}{3}}}$$

Calcul de A

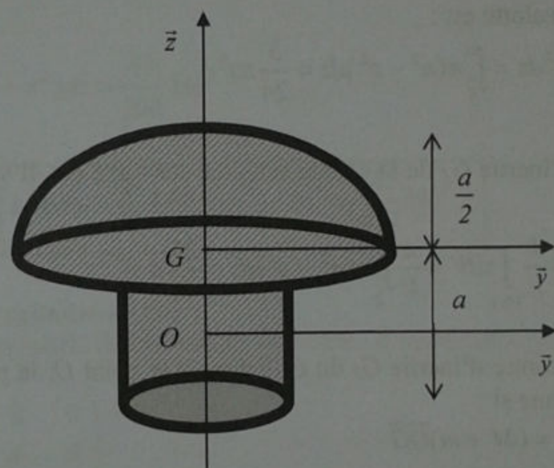
$$\boxed{A = \frac{C}{2} + \int_{(S_1)} z^2 dm = m\frac{\frac{4}{15}R^5 - \frac{a}{4}R^4 - \frac{a^3}{6}R^2 + \frac{3}{20}a^5}{\frac{2}{3}R^3 - aR^2 + \frac{a^3}{3}}}$$

Exercice n° 7 : assemblage d'une calotte sphérique et d'un cylindre

Notions abordées

- **Centre d'inertie**
- **Matrice d'inertie**
- **Théorème de Koenig**

Un solide homogène *(S)* est constitué par une calotte sphérique pleine (S_1), de rayon a, de hauteur $a/2$ à laquelle est soudé un cylindre plein (S_2), droit de rayon R, de hauteur a et dont l'axe de révolution est celui de la calotte. On désigne par O le centre de la sphère, par G le centre d'inertie de *(S)* et on considère deux repères orthonormés directs $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ et $R_G(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ tel que Oz soit confondu avec (OG) (voir figure). Le cylindre a pour masse m et la calotte a pour masse M.



Q1- Calculer le volume V de la calotte sphérique.

Q2- Déterminer son centre d'inertie G_1.

Q3- Déterminer le rapport $\frac{M}{m}$ pour que G soit le centre commun de la base de la calotte et celle du cylindre.

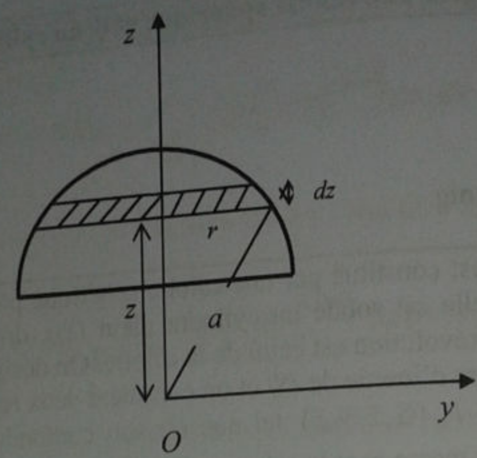
Q4- Déterminer la matrice d'inertie de *(S)* en O dans (R).

R5- En déduire la matrice d'inertie de *(S)* en G dans (R_G).

Solution détaillée

R1- On divise la calotte sphérique en une série de disques d'épaisseurs dz et de rayons variables r tel que : $r^2 = a^2 - z^2$

Le volume élémentaire dV d'un disque est : $dV = \pi r^2 dz$



Le volume de la calotte est :

$$V = \int_{(S_1)} dV = \int_{\frac{a}{2}}^{a} \pi r^2 dz = \int_{\frac{a}{2}}^{a} \pi (a^2 - z^2) dz = \frac{5}{24} \pi a^3$$

R2- Le centre d'inertie G_1 de la calotte est situé sur l'axe Oz. Il suffit donc de calculer sa cote z_{G_1} :

$$z_{G_1} = \frac{1}{m} \int_{(S_1)} z dm = \frac{1}{V} \int_{(S_1)} z dV = \frac{\pi}{V} \int_{\frac{a}{2}}^{a} z(a^2 - z^2) dz = \frac{27}{40} a$$

R3- Comme le centre d'inertie G_2 du cylindre est le point O, le point G sera le centre d'inertie du système si :

$$M\overrightarrow{OG_1} + m\overrightarrow{OG_2} = (M + m)\overrightarrow{OG}$$

soit : $M(\frac{27}{40})\vec{z} = (M + m)\frac{a}{2}\vec{z}$

ou encore :

$$\boxed{\frac{M}{m} = \frac{20}{7}}$$

R4- $M_O^{(S)} = M_O^{(S_1)} + M_O^{(S_2)}$

Matrice d'inertie de la calotte en O

La calotte sphérique admet la symétrie de révolution, sa matrice d'inertie en O est de la forme :

$$M_O^{(S_1)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{avec } A_1 = \frac{C_1}{2} + \int_{(S_1)} z^2 dm$$

Calcule de C_1

$$C_1 = I_{Oz} = \int_{(S_1)} \frac{1}{2} r^2 dm$$

car $dI_{Oz} = \frac{r^2}{2} dm$ est le moment d'inertie d'un disque élémentaire de rayon r et d'épaisseur dz.

$$C_1 = \frac{\rho\pi}{2} \int_{(S_1)} r^4 dz = \frac{\rho\pi}{2} \int_{\frac{a}{2}}^{a} (a^2 - z^2) dz = \frac{53}{200} Ma^2$$

Calcul de $\int_{(S_1)} z^2 dm$

$$\int_{(S_1)} z^2 dm = \rho\pi \int_{\frac{a}{2}}^{a} z^2 (a^2 - z^2) dz = \frac{47}{100} Ma^2$$

d'où :
$$\boxed{A_1 = \frac{C_1}{2} + \int_{(S_1)} z^2 dm = \frac{53}{400} Ma^2 + \frac{47}{100} Ma^2 = \frac{241}{400} Ma^2}$$

Matrice d'inertie du cylindre en O :
Le cylindre admet la symétrie de révolution, sa matrice d'inertie en O est de la forme :

$$M_O^{(S_2)} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

avec :

$$\boxed{\begin{cases} A_2 = \dfrac{mR^2}{4} + \dfrac{ma^2}{12} \\ C_2 = \dfrac{mR^2}{2} \end{cases}}$$

Matrice d'inertie de *(S)* en *O*

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

avec :

$$\boxed{\begin{cases} A = A_1 + A_2 = \dfrac{241}{400}Ma^2 + \dfrac{mR^2}{4} + \dfrac{ma^2}{12} \\ C = C_1 + C_2 = \dfrac{53}{200}Ma^2 + \dfrac{mR^2}{2} \end{cases}}$$

R5- Matrice d'inertie de *(S)* en *G*

D'après le théorème de Huygens généralisé, on a :

$$\begin{cases} A = A_G + (m+M)z_G^2 = A_G + (m+M)(\dfrac{a}{2})^2 \\ C = C_G \end{cases}$$

soit :

$$\boxed{\begin{cases} A_G = \dfrac{71}{400}Ma^2 + \dfrac{ma^2}{3} + \dfrac{mR^2}{4} \\ C_G = C = \dfrac{53}{200}Ma^2 + \dfrac{mR^2}{2} \end{cases}}$$

Remarque concernant les calculs

Pour trouver l'expression de A_G sans difficulté, il faut ajouter et retrancher $\dfrac{ma^2}{4}$ pour faire apparaître $\dfrac{ma^2}{3}$ et ensuite remplacer m par $\dfrac{7}{27}M$.

D'où :

$$M_G^{(S)} = \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_G & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Exercice n° 8 : assemblage d'un cône, d'un cylindre et d'une demi-boule

Notions abordées

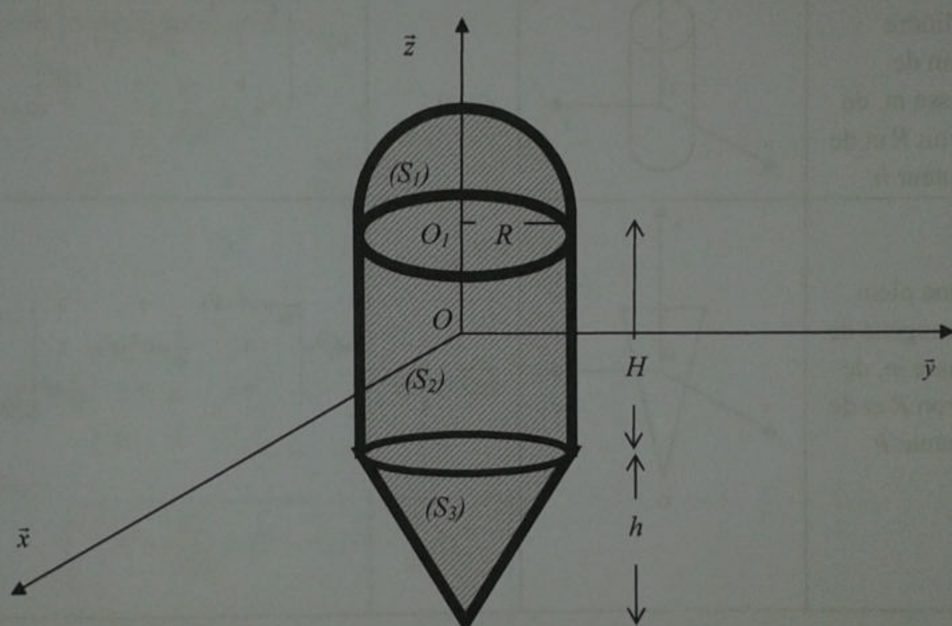
- **Matrice d'inertie**
- **Moment d'inertie par rapport à une droite**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère un système homogène (Σ) constitué par l'assemblage de trois solides (voir figure) :

– une demi-boule pleine homogène (S_1) de masse m_1, de centre O_1 et de rayon R.

– un cylindre plein homogène (S_2) de masse m_2, de rayon R et de hauteur H.

– un cône plein homogène (S_3) de masse m_3, de rayon à la base R et de hauteur h.



$\boxed{Q1-}$ Déterminer la hauteur h du cône pour que le centre d'inertie G du système soit au centre de masse O du cylindre.

$\boxed{Q2-}$ Déterminer la matrice d'inertie de la demi-boule en O dans (R).

$\boxed{Q3-}$ Déterminer la matrice d'inertie du cylindre en O dans (R).

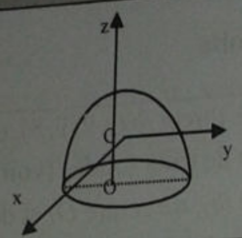
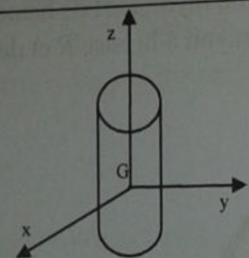
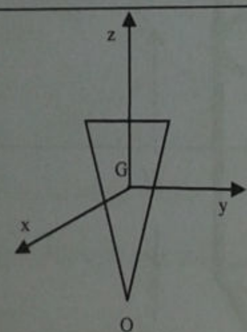
$\boxed{Q4-}$ Déterminer la matrice d'inertie du cône en O dans (R).

$\boxed{Q5-}$ En déduire la matrice d'inertie du système (Σ) en O dans (R).

$\boxed{Q6-}$ Calculer le moment d'inertie de (Σ) par rapport à une droite (Δ) passant par O et faisant un angle θ avec l'axe de symétrie du système. On suppose que (Δ) appartient au plan (yOz).

Il est vivement conseillé d'utiliser le formulaire ci-après.

Formulaire

Corps homogène	**Figure**	**Centre d'inertie**	**Matrice d'inertie en G dans (R)**
Demi-boule de masse m et de rayon R		$\overrightarrow{OG} = \frac{3}{8} R\vec{z}$	$M_G^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Cylindre plein de masse m, de rayon R et de hauteur h		$G \equiv O$	$M_G^{(S_2)} = \begin{pmatrix} \frac{m}{4}(R^2+\frac{h^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{4}(R^2+\frac{h^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$
Cône plein homogène de masse m, de rayon R et de hauteur h		$\overrightarrow{OG} = \frac{3}{4} h\vec{z}$	$M_G^{(S_3)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{80}m(4R^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{80}m(4R^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Solution détaillée

$\boxed{\text{R1-}}$ $\overrightarrow{OG} = \dfrac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} + m_3\overrightarrow{OG_3}}{m_1 + m_2 + m_3}$

$$\text{avec : } \begin{cases} \overrightarrow{OG_1} = (\frac{H}{2} + \frac{3}{8}R)\vec{z} \\ \overrightarrow{OG_2} = \vec{0} \qquad \text{car } G \equiv 0 \equiv G_2 \\ \overrightarrow{OG_3} = (-\frac{H}{2} - \frac{h}{4})\vec{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OG} = \frac{m_1}{M}(\frac{H}{2} + \frac{3}{8}R)\vec{z} - \frac{m_3}{M}(\frac{H}{2} + \frac{h}{4})\vec{z} \qquad \text{avec : } M = m_1 + m_2 + m_3$$

si O est en G, alors : $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$

soit : $\boxed{m_1(\frac{H}{2} + \frac{3}{8}R) = m_3(\frac{H}{2} + \frac{h}{4})}$

Remarque : si $m_1 = m_3 \Rightarrow h = \frac{3}{2}R$

R2- Matrice d'inertie de *(S₁)* en *O = G*

par application du théorème de Huygens, on a :

$M_O^{(S_1)} = M_{G_1}^{(S_1)} + [m_1 d_1^2]$ avec : $d_1 = \frac{3}{8}R + \frac{H}{2}$

d'après le formulaire, on a :

$$M_{G_1}^{(S_1)} = \begin{pmatrix} \frac{83}{320}m_1R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{83}{320}m_1R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}m_1R^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

d'où :

$$M_O^{(S_1)} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

avec :

$$\boxed{\begin{cases} A_1 = \frac{83}{320}m_1R^2 + m_1(\frac{H}{2} + \frac{3}{8}R)^2 \\ C_1 = \frac{2}{5}m_1R^2 \end{cases}}$$

R3- Matrice d'inertie de *(S₂)* en *O = G*

d'après le formulaire, on a :

$$\boxed{M_O^{(S_2)} = \begin{pmatrix} \frac{m_2}{4}(R^2 + \frac{H^2}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{4}(R^2 + \frac{H^2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & m_2\frac{R^2}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R4- Matrice d'inertie de (S_3) en $O = G$

Par application du théorème de Huygens, on a : $M_O^{(S_3)} = M_{G_3}^{(S_3)} + \left[m_3 d_3^2\right]$ avec :

$d_3 = \frac{H}{2} + \frac{h}{4}$

d'après le formulaire, on a :

$$\boxed{M_{G_3}^{(S_3)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{80}m_3(4R^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{80}m_3(4R^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}m_3R^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

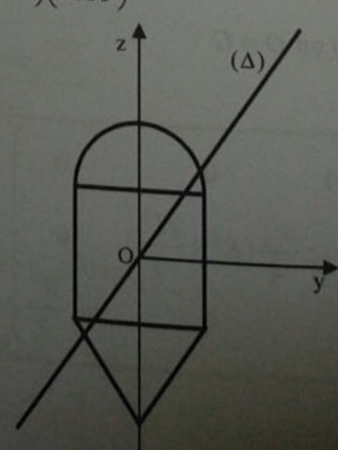
d'où :

$$M_O^{(S_3)} = \begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \quad \text{avec :} \quad \boxed{\begin{cases} A_3 = \frac{3}{80}m_3(4R^2+h^2) + m_3\left(\frac{H}{2}+\frac{h}{4}\right)^2 \\ C_3 = \frac{3}{10}m_3R^2 \end{cases}}$$

R5- $M_0^{(\Sigma)} = M_O^{(S_1)} + M_O^{(S_2)} + M_O^{(S_3)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ avec : $\begin{cases} A = A_1 + A_2 + A_3 \\ C = C_1 + C_2 + C_3 \end{cases}$

R6- $I_\Delta^{(S)} = {}^t\vec{u}M_O^{(\Sigma)}\vec{u}$ avec : $\vec{u} = (0, \sin\theta, \cos\theta)$

$$I_\Delta^{(S)} = (0, \sin\theta, \cos\theta)\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{d'où :} \quad \boxed{I_\Delta^{(S)} = A\sin^2\theta + C\cos^2\theta}$$

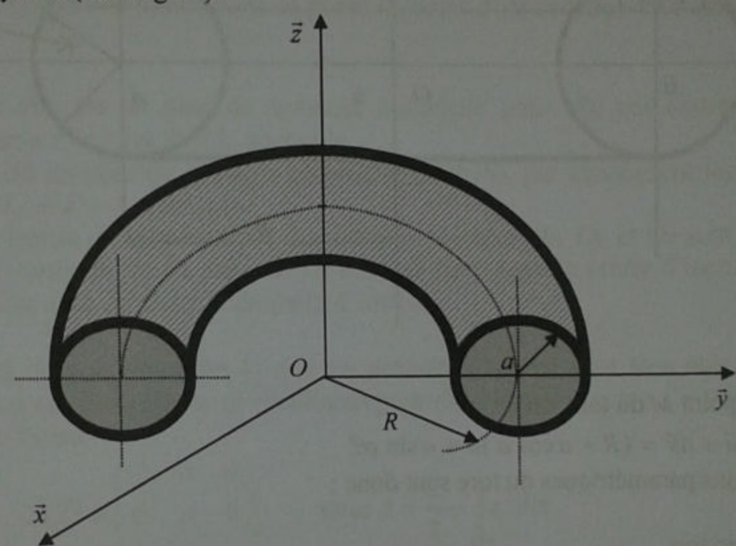


Exercice n° 9 : tore plein

Notions abordées

- **Equations paramétriques**
- **Centre d'inertie**
- **Repère central principal d'inertie**
- **Matrice d'inertie**

L'espace étant rapporté à un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, on considère un tore homogène plein *(S)*, d'axe Oz, de masse volumique ρ, de rayon moyen R et de section de rayon a (voir figure).



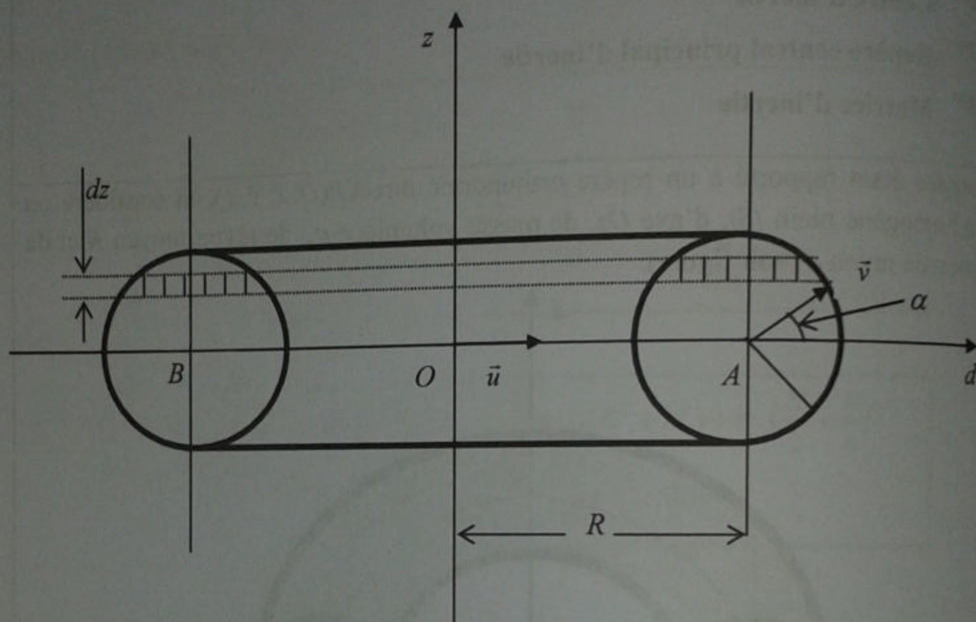
Q1- Déterminer les équations paramétriques du tore. En déduire son équation.
Q2- Calculer la masse du tore.
Q3- Montrer que le centre d'inertie G du tore est confondu avec l'origine O de (R).
Q4- Montrer que le repère (R) est principal central d'inertie.
Q5- Déterminer la matrice d'inertie de *(S)* en O dans (R).
Q6- En déduire la matrice d'inertie d'un cerceau de centre O et rayon R dans (R).

Solution détaillée

R1- Il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques (r,θ,z) :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Un vecteur unitaire $\vec{u}$ du plan *(xOy)* est tel que : $\theta = (\vec{x}, \vec{u})$
Le plan vertical $(\pi) = (O, \vec{u}, \vec{z})$ coupe le tore en un cercle de centre A et de rayon r. Le vecteur unitaire $\vec{v}$, contenu dans (π), fait un angle α avec l'horizontale.



pour tout point M du tore, on a :
$\overrightarrow{OM} = R\vec{u} + a\vec{v} = (R + a\cos\alpha)\vec{u} + a\sin\alpha\vec{z}$
les équations paramétriques du tore sont donc :

$$\begin{cases} r = R + a\cos\alpha \\ z = a\sin\alpha \end{cases}$$

et en éliminant le paramètre α, on a :
$(r-R)^2 + z^2 = a^2$

d'où l'équation du tore :

$$\boxed{r = R \pm \sqrt{a^2 - z^2}}$$

R2- La masse d'un élément de volume élémentaire dV est : $dm = \rho dV = \rho r dr d\theta dz$
la masse du tore est :

$$m = \rho\int_{z=-a}^{z=+a}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=R-\sqrt{a^2-z^2}}^{r=R+\sqrt{a^2-z^2}} r dr d\theta dz = \rho\int_{z=-a}^{z=+a}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 2R\sqrt{a^2-z^2}\, d\theta dz = \rho 4\pi R\int_{z=-a}^{z=+a}\sqrt{a^2-z^2}\, dz$$

en utilisant le changement de variables :

$$z = r\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad dz = r\cos\alpha d\alpha \qquad (-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$$

Il vient :

$$\boxed{m = \rho 4\pi R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \alpha d\alpha = \rho 2\pi^2 R a^2}$$

R3- Le tore admet l'axe Oz comme axe de symétrie de révolution, son centre d'inertie G est situé sur cet axe. Par ailleurs le tore admet le plan xOy pour plan de symétrie matérielle, son centre d'inertie appartient donc à ce plan. Par conséquent, le centre d'inertie G de *(S)* est confondu avec le point O, point d'intersection de l'axe Oz et du plan xOy.

R4- Le plan xOz est un plan de symétrie matérielle pour *(S)*, par conséquent les produits d'inertie $F = I_{xy}$ et $D = I_{yz}$ sont nuls.
Le plan yOz est un plan de symétrie matérielle pour *(S)*, par conséquent les produits d'inertie $F = I_{xy}$ et $E = I_{xz}$ sont nuls.
La matrice d'inertie du tore est donc diagonale et les axes Ox, Oy et Oz sont des axes principaux d'inertie de *(S)* au point O. Le point O étant aussi le centre d'inertie de *(S)*, ces axes sont les axes centraux principaux d'inertie.

R5- On vient de voir (question 4) que les produits d'inertie sont tous nuls. Comme l'axe Oz est un axe de symétrie de révolution pour *(S)*, alors la matrice d'inertie du tore en O est de la forme :

$$M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} \qquad \text{avec } A = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2 dm$$

Calcul de C

$$C = I_{Oz} = \int_{(S)} (x^2+y^2)dm = \rho \int_{(S)} r^2 dV = \rho \int_{z=-a}^{z=+a} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=R-\sqrt{a^2-z^2}}^{r=R+\sqrt{a^2-z^2}} r^3 dr d\theta dz$$

$$= \rho 4\pi R \int_{z=-a}^{z=+a} (R^2 + a^2 - z^2)\sqrt{a^2 - z^2}\, dz$$

en posant :

$$z = r\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad dz = r\cos\alpha d\alpha \qquad (-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$$

il vient :

$$C = \rho 4\pi R \int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}} (R^2 + a^2\cos^2\alpha) a^2 \cos^2 \alpha d\alpha = \rho 4\pi R a^2 (\frac{\pi R^2}{2} + \frac{3\pi a^2}{8})$$

soit :

$$\boxed{C = m\frac{(4R^2+3a^2)}{4}}$$

Calcul de $\int_{(S)} z^2 dm$

$$m = \rho\int_{z=-a}^{z=+a}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=R-\sqrt{a^2-z^2}}^{r=R+\sqrt{a^2-z^2}} r dr d\theta dz = \rho\int_{z=-a}^{z=+a}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 2R\sqrt{a^2-z^2}\, d\theta dz$$

$$= \rho 4\pi R\int_{z=-a}^{z=+a}\sqrt{a^2-z^2}\, dz$$

en posant :

$z = r\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad dz = r\cos\alpha d\alpha \qquad (-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$ il vient :

$$\boxed{\int_{(S)} z^2 dm = \rho 4\pi R a^4\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=+\frac{\pi}{2}}\cos^4\alpha d\alpha = \frac{ma^2}{4}}$$

Calcul de A

$$\boxed{A = \frac{C}{2} + \int_{(S)} z^2 dm = m\frac{(4R^2+5a^2)}{8}}$$

d'où :

$$\boxed{M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} m\frac{(4R^2+5a^2)}{8} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{(4R^2+5a^2)}{8} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{(4R^2+3a^2)}{4} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

R6- Pour retrouver la matrice d'inertie d'un cerceau, il suffit de prendre $a = 0$, le tore se transforme alors en cerceau de centre O et de rayon R, et la matrice d'inertie s'écrit :

$$\boxed{M_O^{(S)} = \begin{pmatrix} m\frac{R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$